Coiflet Filter係数,Biorthogonal wavelet Filter係数の計算(科学技術における数値計算の理論と応用)

秦野, 和郎

数理解析研究所講究録
944 巻 1996 年 218-226

Coiflet Filter 係数, Biorthogonal wavelet Filter 係数の計算

愛知工業大学・電子工学科　秦野和郎　(Kazuo Hatano)

文献 [2] に, 台が局所的 (compactly supported) な Wavelet を構成するための種々の Filter 係数が与えられている. すなわち,

(1) 正規直交 Wavelet Filter 係数として, (1-1) 台の幅を同一としたとき, 最高次数の近似条件を満足する Filter 係数 (Daubechies の Wavelet), (1-2) 対称性をよくした Coiflet Filter 係数などの表が与えられている. また,

(2) 双直交 Wavelet Filter 係数として, (2-1)Spline Wavelet Filter 係数, (2-2)Coiflet に近い Biorthogonal Wavelet Filter 係数などの表が与えられている. しかし,

(1-1) については, 見かけは 16 桁であるが, 下位 5 桁に誤りのある係数があり, 桁数不足である. (1-2) については, $K=1$ の係数に写し間違いと思われる係数がある. また, 12 桁程度与えられているのみであり桁数不足である. (2-1) は簡単に計算できる係数であるが, 僅かな個数しか与えられていない. (2-2) は性質のよい Wavelet であるが, Filter 係数は $K=1,2,3$ に対して与えられているのみである.

Wavelet 変換は直交変換として非常に有用と思われるので, これらの Filter 係数は少なくとも倍精度計算に使える程度の高精度の値を, 又, より高い近似条件を満足する係数を計算しておく必要がある. このような背景から, ここでは十分な個数の Filter 係数を十分な桁数で計算した. 紙数の関係から, 以下ではこれらの Filter 係数の計算について簡単に述べ, $K\leq 5$ に対する Coiflet Filter 係数, Biorthogonal Wavelet Filter 係数の表を掲示する.

1. Coiflet Filter 係数.

文献 [2] によれば, $2K$次 Coiflet の Filter 係数を, $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \cdots, c_{4K-1}$ とすると, それらを係数とする, 2π-周期の周期関数, $m_0(\xi)=\sum_{j=-2K}^{4K-1} c_j e^{-ij\xi}$ に関して,

$$
(1)\qquad \begin{cases} m_0^{(k)}(\pi)=0 \ :0\leq k\leq 2K-1 \ (\text{近似条件}) \ , \\ m_0^{(k)}(0)=0 \ :1\leq k\leq 2K-1 \ (\text{対称条件}) \ , \\ |m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2\equiv 1 \ (\text{直交条件}) \end{cases}
$$

が成り立つ. 文献 [2] によれば, 2π-周期の周期関数,

$$
(2)\qquad m_0(\xi)=\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right)^K\left[\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^k+\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^K\sum_{j=0}^{2K-1}\lambda_j e^{-ij\xi}\right]
$$

は, 式 (1) の近似条件と対称条件とを満たす. 従って, 文献 [2] では, 残った直交条件を満たすように, λ_j を決めると言う方針で Coiflet Filter 係数を計算している. $z=e^{-i\xi}$ とおくと,

$$
(3)\qquad \cos^2\frac{\xi}{2}=\frac{(1+z)^2}{4z} \ , \ \sin^2\frac{\xi}{2}=-\frac{(1-z)^2}{4z} \ , \ e^{-\frac{\xi}{2}}\cos\frac{\xi}{2}=\frac{(1+z)}{2}
$$

である. これを式 (2) に代入して, 得られた式を整理して, 式 (1) の第三式を適用すると, $\lambda_j\ :\ 0 \le j \le 2K-1$ を未知数とする, $3K$個の連立二次方程式が得られる. これを解いて, Filter 係数 $c_j\ :\ -2K \le j \le 4K-1$ を得る. しかし, この方法は多分に手計算向きであり, 多くの Kについて Filter 係数を計算することは非常に難しい.

ここでは次のようにして Filter 係数の計算を行った. まず, 式 (1) から,

$$
(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-2K}^{4K-1} (-1)^j j^k c_j = 0 \ :\ 0 \le k \le 2K-1 \ (\text{近似条件}), \\ \displaystyle\sum_{j=-2K}^{4K-1} j^k c_j = 0 \ :\ 1 \le k \le 2K-1 \ (\text{対称条件}), \\ \displaystyle\sum_{j=-2K}^{4K-1-2k} c_j c_{j+2k} = \frac{1}{2}\delta_{k,0} \ :\ 0 \le k \le 3K-1 \ (\text{直交条件}) \end{cases}
$$

を得ることができる. 上式は, $6K$ 個の未知数を持つ, $7K-1$ 個の方程式である. 従って, 解が一つだけ存在するときには, 全ての方程式が独立な訳ではない. 第一式と第二式を連立化して ($4K-1$ 元の連立一次方程式), $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \cdots, c_{2K-2}$ を $c_{2K-1}, c_{2K}, \cdots, c_{4K-1}$ の線形結合で表すことができる. すなわち, $c_{-2K}, c_{-2K+1}, \cdots, c_{2K-2}$を未知数とする $4K-1$ 元の連立一次方程式,

$$
(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-2K}^{2K-2} (-1)^j j^k c_j = -\sum_{j=2K-1}^{4K-1} (-1)^j j^k c_j \ :\ 0 \le k \le 2K-1, \\ \displaystyle\sum_{j=-2K}^{2K-2} j^k c_j = -\sum_{j=2K-1}^{4K-1} j^k c_j \ :\ 1 \le k \le 2K-1 \end{cases}
$$

を解いて得られた結果,

$$
(6)\qquad c_k = \sum_{j=2K-1}^{4K-1} \alpha_{k,j} c_j \ :\ -2K \le k \le 2K-2
$$

を, 式 (4) の第三式で, $0 \le k \le 2K$ とした $2K+1$ 個の方程式に代入すると $2K+1$ 元の連立二次方程式,

$$
(7)\qquad f_k = \sum_{l=2K-1}^{4K-1} \sum_{j=2K-1}^{l} \beta_{l,j}^{[k]} c_l c_j - \frac{1}{2}\delta_{k,0} = 0 \ :\ k = 0, 1, \cdots, 2K
$$

を得る. これを Newton 法で解き, 得られた解, $c_{2K-1}, c_{2K}, \cdots, c_{4K-1}$を, 式 (4) の第三式で $2K+1 \le k \le 3K-1$ とした方程式, すなわち使わなかった方程式に代入して, それらが十分な精度で成り立つことを確認する.

$1 \le K \le 17$ に対して, 10 進 270 桁程度の多倍長計算で, 上の手順を適用し,4 倍精度の計算に適用できる程度の高精度の Coiflet Filter 係数を計算した. ここでは, これらの結果を, $1 \le K \le 5$ について, Table 1 に示す.

2. Spline Wavelet Filter 係数.

文献 [2] によれば, $\tilde{N} = 2\tilde{l}$, $N = 2l$ のとき, 二つの 2π-周期の周期関数,

$$\text{(8)} \qquad \tilde{m}_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{\tilde{N}} \quad , \quad m_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{N} \sum_{j=0}^{l+\tilde{l}-1} \binom{l+\tilde{l}-1+j}{j} \left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^j$$

は,

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \tilde{m}_0(\xi)m_0(\xi) + \tilde{m}_0(\xi+\pi)m_0(\xi+\pi) \equiv 1 \ , \\ \tilde{m}_0(0) = 1 \ , \ \ \tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0 \ : \ 0 \le k \le 2\tilde{l}-1 \\ m_0^{(k)}(\pi) = 0 \ : \ 0 \le k \le 2l-1 \end{cases}$$

を満足する. すなわち, 双直交条件を満足し, それぞれ $2\tilde{l}$次, $2l$次の近似条件を満足する. 従って, 式 (3) を使い, 式 (8) を

$$\text{(10)} \qquad \tilde{m}_0(\xi) = \sum_{r=-\tilde{l}}^{\tilde{l}} \alpha_r z^r \quad , \quad m_0(\xi) = \sum_{r=-2l-\tilde{l}+1}^{2l+\tilde{l}-1} \beta_r z^r$$

の形に書き改めると, 上式における $\alpha_r \ : -\tilde{l} \le r \le \tilde{l}$, $\beta_r \ : -2l-\tilde{l}+1 \le r \le 2l+\tilde{l}-1$ は, Spline Wavelet の Filter 係数である. これらの係数はすべて有理数である. $\tilde{N} = 2\tilde{l}+1$, $N = 2l+1$ のときも同じようにして Filter 係数を得ることができる. このように, Spline Wavelet Filter 係数は容易に計算することができる.

3. Coiflet に近い Biorthogonal Wavelet Filter 係数.

文献 [2] によれば, 二つの 2π-周期の周期関数,

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} m_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} \left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2k} + a\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2K} \right] \\ \tilde{m}_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} \left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2k} + \sum_{k=K}^{3K-1} \lambda_k \left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2k} \right] \end{cases}$$

は,

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} m_0(0) = 1 \ , \ \ m_0^{(k)}(\pi) = 0 \ : \ 0 \le k \le 2K-1 \ , \\ \tilde{m}_0^{(k)}(\pi) = 0 \ : \ 0 \le k \le 2K-1 \end{cases}$$

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(1/3)

	j	Coiflet Filter Coefficients c_j
$K=1$	−2	−5.142972847076845595317549230122688830344559947132656813651045e − 02
	−1	2.389297284707684559531754923012268883034455994713265681365104e − 01
	0	6.028594569415369119063509846024537766068911989426531362730209e − 01
	1	2.721405430584630880936490153975462233931088010573468637269790e − 01
	2	−5.142972847076845595317549230122688830344559947132656813651045e − 02
	3	−1.107027152923154404682450769877311169655440052867343186348954e − 02
$K=2$	−4	1.158759673871686817889714882853120395708315073355502818875931e − 02
	−3	−2.932013798346856448679594524397843054053420947418409889774786e − 02
	−2	−4.763959031100813225872995081511549408622753909592460525840745e − 02
	−1	2.730210465347666137982239328923516270034828327990699588033501e − 01
	0	5.746823938568638472459483149751499367740786490481481391460366e − 01
	1	2.948671936956191896750637208703777973914107635455611537640778e − 01
	2	−5.408560709171142997443672832006888537570221990444706777525838e − 02
	3	−4.202648046077160694657530752545884878978719268926222513485613e − 02
	4	1.674441016327950635146257083249391698866289538037299820224006e − 02
	5	3.967883612962012109043447090269950094081810916481648252817197e − 03
	6	−1.289203356140659543141355500990678257894936161704492503370186e − 03
	7	−5.095053991076441489598480835620951586540050976664367876412655e − 04
$K=3$	−6	−2.682418670922068664584689955153722375535836177157637134187840e − 03
	−5	5.503126707831385107969640263617469178794666057252906037981936e − 03
	−4	1.658356047917034608134280439996549525220639437145367606178002e − 02
	−3	−4.650776447872697640390293095170192691113917841041002855534619e − 02
	−2	−4.322076356021191118175840907244577856782537221435748296465882e − 02
	−1	2.865033352736474630249006862976158896891076238443844211133873e − 01
	0	5.612852568703300445990941995240077241406247774064453800050914e − 01
	1	3.029835717728241602862575774374668529867757043461413348549577e − 01
	2	−5.077014075488886159516471867138370972545857441670871832472707e − 02
	3	−5.819625076158553022607041679522801089624825903982541419721721e − 02
	4	2.443409432116695639462954438418928805487699080947974989338820e − 02
	5	1.122924096203786563399489540091488781245346096838814728167341e − 02
	6	−6.369601011048822977293753932627342482077585617391852852955559e − 03
	7	−1.820458915566242322836631665832145136570132777862391313328351e − 03
	8	7.902051009575939937150950543290226440287715441826917281929124e − 04
	9	3.296651737931830308416338897758022998655744276957481989605186e − 04
	10	−5.019277455327664998007173088097694083956570594580641192332170e − 05
	11	−2.446573425530813115445387662881902303945941576472342106918209e − 05
$K=4$	−8	6.309612114309468490753696608619526520153127603444406835368201e − 04
	−7	−1.152225143769973488683007937016166047881572156705066038094891e − 03
	−6	−5.194525163470323267558201363327294331811309729430512113592118e − 03

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(2/3)

	j	Coiflet Filter Coefficients c_j
$K=4$	−5	1.136246148326482276463392678363118465908960082105224676102131ε − 02
	−4	1.886723856956305960822813160712701905823879297781452350370094ε − 02
	−3	−5.746424190192718517290527411385172124443396690932404284859269ε − 02
	−2	−3.965265296244913762718094206756579981738035770770645437919302ε − 02
	−1	2.936674050161006858761278962798582650835466243678172528509866ε − 01
	0	5.531264550395492870333469741987846570947502710783248169642137ε − 01
	1	3.071573096678856987248881030393884808414165269795297009902001ε − 01
	2	−4.711273752389572084912399351781012121935994396763702238263689ε − 02
	3	−6.803811467802056988332974920928626798429778679560269769187728ε − 02
	4	2.781363695846951303169163645831936314699164412528991864702607ε − 02
	5	1.773583142270308388403079552822372238681544967313003044695583ε − 02
	6	−1.075631615508724933047071603601897536695959225169888787867102ε − 02
	7	−4.001010844950535391911552472397083276670126595827549403173754ε − 03
	8	2.652664913530499860820143301690017184933302935238430721089152ε − 03
	9	8.955939276952843603555618778866181384528643960440369133096025ε − 04
	10	−4.165001950941708741516836418852536615951250588002878691463468ε − 04
	11	−1.838296167136253805617482342622910940008368723403836355183423ε − 04
	12	4.408022661597206973006038672236031501663774161685451815597956ε − 05
	13	2.208284691230832960893331999804142845136324572860276715790883ε − 05
	14	−2.304919162676504406778986897925054839632903355820414483306851ε − 06
	15	−1.262179179994622253884862172782890488140153502131112374520603ε − 06
$K=5$	−10	−1.499645228345950331670593167919531667975440598691604525531231ε − 04
	−9	2.535527523580334712936363872191554706055603482812691726895588ε − 04
	−8	1.540286725995222360335148244676269541414659303531250711822333ε − 03
	−7	−2.941078164035693185044038586065593320891475311414770624555173ε − 03
	−6	−7.164112349410053294382279572472252500899544810929605832362178ε − 03
	−5	1.655218330649288840540841623080651353621667424921282557975513ε − 02
	−4	1.991901719798432056056857854066125809443504706772520641876273ε − 02
	−3	−6.499837825472324963374262221660858232544804226063450042795603ε − 02
	−2	−3.680255347446873527191823500872992242220223547780834450868002ε − 02
	−1	2.980959014587191795511466861338063554509597132272839414668911ε − 01
	0	5.475082713540367154128337935687830970431964302909253422329131ε − 01
	1	3.097002590784203529311533316221254677074498876376965941549923ε − 01
	2	−4.386731482823615640442730013366750193381707273908757638050452ε − 02
	3	−7.464442013283971243472663968192859562973186442054433655531762ε − 02
	4	2.919469277528073666095772398605275751022315529465178441510318ε − 02
	5	2.310457227706684192610065243663928370022983285246219996141160ε − 02
	6	−1.397129268638200558584119246355879336305763752871371182932059ε − 02
	7	−6.476749751505861835547590642967453082384538848552165075614441ε − 03

Table 1. Coiflet Filter Coefficients named by Daubechies.(3/3)

	j	Coiflet Filter Coefficients c_j
$K=5$	8	4.781116799130657606400088024549264921093190305150784065791191e − 03
	9	1.719383484385504023022397097446276782318002683055773803854075e − 03
	10	−1.174947934413537690027670037110105795928147523549002426409332e − 03
	11	−4.508222400696236312231932151038336110220594834213702970043431e − 04
	12	2.134457975086291667348984871136041914777578046177470626552867e − 04
	13	9.924691139873533169989496559631669037970741600337089424730635e − 05
	14	−2.914684388622130824599478843558087403539428940986384077972155e − 05
	15	−1.504031798197685905639227292876711236513927746903476131955063e − 05
	16	2.616809660013118152124234488302931243021794024318439103773996e − 06
	17	1.457502921355163070577152619048168436286350537937563166257584e − 06
	18	−1.148199649902979726237655584441763456854312591680755421569962e − 07
	19	−6.791060677322355511541065559242475254516249773485524025251102e − 08

を満足する. すなわち, いずれも $2K$次の近似条件を満足する. $m_0(\xi)$ を Coiflet のそれに近づけるために, 第一式における, a を,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[1-|m_0(\xi)|^2-|m_0(\xi+\pi)|^2\right]d\xi\right|=0 \tag{13}$$

が満足されるように決める. これは a についての 2 次方程式である. $K=30$ まで計算したところでは, この二次方程式は二つの実根を持つ. 得られた a の絶対値の小さい方を採用し, それに近い有理数を求める. $K=1$ では, 0.8 , $K=2$ では 3.2 , それ以上の Kでは整数にする. これにより, $m_0(\xi)$ は確定する. 次に, 式 (11) 第二式における, $\lambda_k\ :K\le k\le 3K-1$ を, 双直交条件,

$$m_0(\xi)\tilde{m}_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)\tilde{m}_0(\xi+\pi)\equiv 1 \tag{14}$$

が満足されるように決める. 式 (14) から, $2K$ 個の未知数を持つ, $3K$ 個の一次方程式が得られるが, 解を得ることは可能である. そのようにして得られた解を使って, 式 (11) を

$$\begin{cases} m_0(\xi)=\displaystyle\sum_{k=-2K}^{2K}\alpha_k e^{-ik\xi}=\sum_{k=-2K}^{2K}\alpha_k z^k\ ,\ \alpha_{-k}=\alpha_k\ :\ k=1,2,\cdots,2K\ , \\ \tilde{m}_0(\xi)=\displaystyle\sum_{k=-4K+1}^{4K-1}\beta_k e^{-ik\xi}=\sum_{k=-4K+1}^{4K-1}\beta_k z^k\ :\ \beta_{-k}=\beta_k\ :\ k=1,2,\cdots,4K-1 \end{cases}$$

の形にすれば, 上式における $\alpha_k\ :\ -2K\le k\le 2K$, $\beta_k\ :\ -4K+1\le k\le 4K-1$ は双対の Wavelet Filter 係数である. $1\le K\le 30$ に対して 10 進 270 桁程度の多倍長計算で上の手順を実行し, 十分な精度の Filter 係数を算出した. $1\le K\le 5$ についての Filter 係数を Table 2 に示す.

Table 2. Biorthogonal Wavelet Filter Coefficients.(1/3)

	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=1$	± 2	−5.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 1	2.500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	0	6.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=1$	± 3	−1.071428571428571428571428571428571428571428571428571428571428ε − 02
	± 2	−5.357142857142857142857142857142857142857142857142857142857142ε − 02
	± 1	2.607142857142857142857142857142857142857142857142857142857142ε − 01
	0	6.071428571428571428571428571428571428571428571428571428571428ε − 01
	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=2$	± 4	1.250000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 3	−3.125000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 2	−5.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 1	2.812500000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	0	5.750000000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=2$	± 7	−5.065247252747252747252747252747252747252747252747252747252747ε − 04
	± 6	−1.266311813186813186813186813186813186813186813186813186813186ε − 03
	± 5	3.837568681318681318681318681318681318681318681318681318681318ε − 03
	± 4	1.592548076923076923076923076923076923076923076923076923076923ε − 02
	± 3	−3.972355769230769230769230769230769230769230769230769230769230ε − 02
	± 2	−5.230511675824175824175824175824175824175824175824175824175824ε − 02
	± 1	2.863925137362637362637362637362637362637362637362637362637362ε − 01
	0	5.752918956043956043956043956043956043956043956043956043956043ε − 01
	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=3$	± 6	−3.173828125000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 03
	± 5	5.859375000000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 03
	± 4	1.904296875000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 3	−4.882812500000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 2	−4.760742187500000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 02
	± 1	2.929687500000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	0	5.634765625000000000000000000000000000000000000000000000000000ε − 01
	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=3$	± 11	−2.546695034199781378600823045267489711934156378600823045267489ε − 05
	± 10	−4.701590832368827160493827160493827160493827160493827160493827ε − 05
	± 9	3.392743083184638631687242798353909465020576131687242798353909ε − 04
	± 8	7.360563552919238683127572016460905349794238683127572016460905ε − 04
	± 7	−1.774953991297341177983539094650205761316872427983539094650205ε − 03
	± 6	−5.725661540718235596707818930041152263374485596707818930041152ε − 03
	± 5	1.053637359367967142489711934156378600823045267489711934156378ε − 02

Table 2. Biorthogonal Wavelet Filter Coefficients.(2/3)

	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=3$	± 4	2.198363755465534979423868312757201646090534979423868312757201$\epsilon-02$
	± 3	−5.522013566130963863168724279835390946502057613168724279835390$\epsilon-02$
	± 2	−4.700510032873585390946502057613168724279835390946502057613168$\epsilon-02$
	± 1	2.961449087009508423353909465020576131687242798353909465020576$\epsilon-01$
	0	5.601161677356610082304526748971193415637860082304526748971193$\epsilon-01$
	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=4$	± 8	7.934570312500000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-04$
	± 7	−1.220703125000000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-03$
	± 6	−6.347656250000000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-03$
	± 5	1.196289062500000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-02$
	± 4	2.221679687500000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-02$
	± 3	−5.981445312500000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-02$
	± 2	−4.443359375000000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-02$
	± 1	2.990722656250000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-01$
	0	5.555419921875000000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-01$
	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=4$	± 15	−1.359560541510883460577895801719777440566514921598381385938290$\epsilon-06$
	± 14	−2.091631602324436093196762771876580677794638340920586747597369$\epsilon-06$
	± 13	2.356712441483791713428384758050918900691283088855167762603270$\epsilon-05$
	± 12	4.002205136855001132819086157477659753835778114989040633957174$\epsilon-05$
	± 11	−1.933241274400658640445856516607654695666835272298094756364862$\epsilon-04$
	± 10	−3.764893091703783780401702916877423705951778789411566346315966$\epsilon-04$
	± 9	8.961332853317582331908088855167762603270949249704940145000843$\epsilon-04$
	± 8	2.332784662036062834576799865115494857528241443264205024447816$\epsilon-03$
	± 7	−3.774691291129562951645749030517619288484235373461473613218681$\epsilon-03$
	± 6	−9.352681537519476502565966953296240094419153599730230989715056$\epsilon-03$
	± 5	1.657878255526546361856005521834429269937615916371606811667509$\epsilon-02$
	± 4	2.449250584327235951067484403979092901702916877423705951778789$\epsilon-02$
	± 3	−6.485651277828489903996875526892598212780306862249199123250716$\epsilon-02$
	± 2	−4.304651529948559846107844377002191873208565166076546956668352$\epsilon-02$
	± 1	3.013274047923839789702345198954645085145843871185297588939470$\epsilon-01$
	0	5.518249304422016108423958860225931546113640195582532456584049$\epsilon-01$
	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=5$	± 10	−1.974105834960937500000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-04$
	± 9	2.670288085937500000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-04$
	± 8	1.974105834960937500000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-03$
	± 7	−3.089904785156250000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-03$
	± 6	−8.883476257324218750000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-03$
	± 5	1.730346679687500000000000000000000000000000000000000000000000$\epsilon-02$

Table 2. Biorthogonal Wavelet Filter Coefficients.(3/3)

	j	Coefficients of $m_0(\xi)$ α_j
$K=5$	$\pm$ 4	2.368927001953125000000000000000000000000000000000000000000e − 02
	$\pm$ 3	−6.729125976562500000000000000000000000000000000000000000000e − 02
	$\pm$ 2	−4.145622253417968750000000000000000000000000000000000000000e − 02
	$\pm$ 1	3.028106689453125000000000000000000000000000000000000000000e − 01
	0	5.497474670410156250000000000000000000000000000000000000000e − 01
	j	Coefficients of $\tilde{m}_0(\xi)$ β_j
$K=5$	$\pm$ 19	−7.514195040962034224162458866199507534611122673371990289896241e − 08
	$\pm$ 18	−1.016412855782304146263521006055972033667204999296694338729926e − 07
	$\pm$ 17	1.599511698419153714296535095124043777724870774973579060984074e − 06
	$\pm$ 16	2.323312723370028940045143215681208168672718631668786929232291e − 06
	$\pm$ 15	−1.633658646931991233853845460412910379822638660801935538306169e − 05
	$\pm$ 14	−2.591300362310439014785343604077319174830088229283656938650570e − 05
	$\pm$ 13	1.061747601153698734141830183929597263709537107535483613530590e − 04
	$\pm$ 12	1.892593440489800299116207438251886326946070410725058446268189e − 04
	$\pm$ 11	−4.635587080521111901527640842579625001698636783251363609163741e − 04
	$\pm$ 10	−1.022504337193453616355817485496895680827026886292799025105687e − 03
	$\pm$ 9	1.661679142768592235483671913841362933539844026534120505408738e − 03
	$\pm$ 8	4.094507927617723977814241177900717734980175560481625770243211e − 03
	$\pm$ 7	−6.030353232546079919580345209831720523244379232784859491312697e − 03
	$\pm$ 6	−1.196742641575721998973114277274661570417278497721064646291380e − 02
	$\pm$ 5	2.162558487705097796959388802746234153322122330923199195620714e − 02
	$\pm$ 4	2.552058760600699322819506472951499926166177219477547762791145e − 02
	$\pm$ 3	−7.143449261743717530837741951221210843809508906494698364934051e − 02
	$\pm$ 2	−4.000908937265524738948407872969299577876062067278584668762466e − 02
	$\pm$ 1	3.045497779948217367185852693907027943234731585565970981748256e − 01
	0	5.464367131602350727025450939632425982304137452482415607695076e − 01

4. おわりに.

文献 [2] には，多くの直交 Wavelet が述べられており，非常に有用である．これらの Wavelet 関数は，その台が局所的であるから，変換も逆変換も少ない計算量で実行できる．しかし，Filter 係数のような数表を必要とすることは，離散 Wavelet 変換の大きな欠点である．文献 [2] に与えられている表はあまりにも貧弱であるから，ここでの試みは意義があると思う．計算した数表をどのように流通させるかを検討中である．

参考文献

[1] William H.Press 他著 : Numerical Recipes in FORTRAN, The Art of Scientific Computing , Second Edition , Cambridge University Press(1922),p.963.

[2] Ingrid Daubechies : Ten Lectures on Wavelets , SIAM(1992),p.357.

[3] 秦野和郎 : Wavelet Filter 係数の計算, 第 24 回数値解析シンポジウム講演予稿集 (1995), pp.19-22.